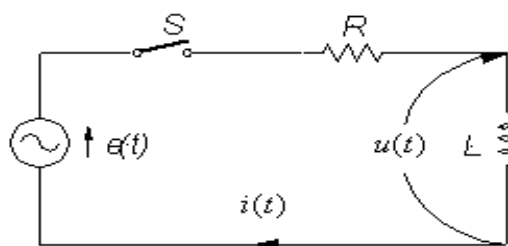


## KOLA SA PROSTOPERIODIČNIM STRUJAMA

### 1. Ustaljeni sinusni (prostoperiodični) režim

Posmatrajmo prvo  $RL$  kolo prikazano na sl. 1, koje se zatvaranjem prekidača  $S$  priključuje u trenutku  $t=0$  na izvor prostoperiodične ems  $e(t)=E_m \cdot \cos(\omega \cdot t + \theta)$ , gde je  $E_m > 0$ . Početni fazni stav pobude je  $\theta$ . Početni uslov za struju kola glasi  $i(0)=0[A]$ , a njena kompletna varijacija za  $t > 0$  određuje se iz nehomogene, linearne diferencijalne jednačine prvog reda sa konstantnim koeficijentima:

$$L \cdot \frac{di}{dt} + R \cdot i = E_m \cdot \cos(\omega \cdot t + \theta), \quad i(0) = 0[A]. \quad (1)$$



Sl. 1

Rešenje diferencijalne jednačine (1) zbir je rešenja homogene jednačine  $i_s = K \cdot \exp[(-R/L) \cdot t]$  koje predstavlja *sopstveni odziv* kola i partikularnog integrala  $i_p = I_m \cdot \cos(\omega \cdot t + \psi)$  koji odgovara *prinudnom odzivu* kola, gde je  $\psi = \theta - \varphi$ . Dakle:

$$i(t) = K \cdot e^{-\frac{R}{L}t} + I_m \cdot \cos(\omega \cdot t + \theta - \varphi), \quad i(0) = 0 [A], \quad K = -i_p(0) = -I_m \cdot \cos(\theta - \varphi), \quad (2)$$

pri čemu se amplituda  $I_m$  i fazna razlika  $\varphi = \theta - \psi$  u partikularnom integralu-prinudnom odzivu određuju zamenom izraza  $I_m \cdot \cos(\omega \cdot t + \theta - \varphi)$  u diferencijalnu jednačinu (1) koju taj izraz mora zadovoljavati  $\forall t$ . Odatle za  $t \geq 0$  sledi:

$$-\omega \cdot L \cdot I_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \theta - \varphi) + R \cdot I_m \cdot \cos(\omega \cdot t + \theta - \varphi) = E_m \cdot \cos(\omega \cdot t + \theta).$$

Nakon primene adicionih formula i grupisanja članova dobija se:

$$\begin{aligned} (R \cdot I_m \cdot \sin\varphi - \omega \cdot L \cdot I_m \cdot \cos\varphi) \cdot \sin(\omega \cdot t + \theta) + (R \cdot I_m \cdot \cos\varphi + \omega \cdot L \cdot I_m \cdot \sin\varphi) \cdot \cos(\omega \cdot t + \theta) = \\ = E_m \cdot \cos(\omega \cdot t + \theta) \Rightarrow R \cdot I_m \cdot \sin\varphi - \omega \cdot L \cdot I_m \cdot \cos\varphi = 0, \quad R \cdot I_m \cdot \cos\varphi + \omega \cdot L \cdot I_m \cdot \sin\varphi = E_m, \end{aligned} \quad (3)$$

pa se odatle dobijaju tražene veličine  $I_m$  i  $\varphi \in (0, \pi/2)$  u sledećem obliku,

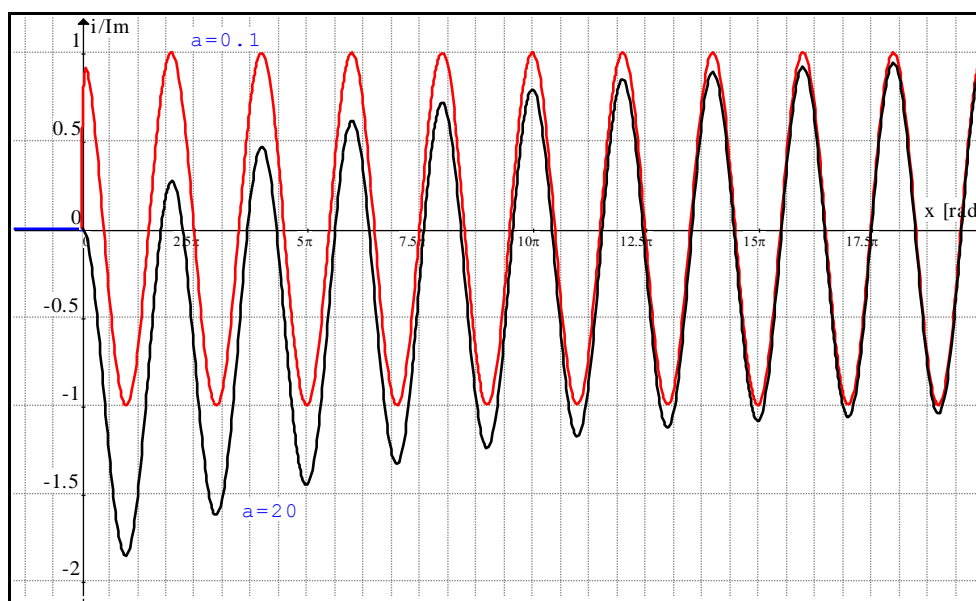
$$I_m = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + (\omega \cdot L)^2}} = \frac{E_m}{Z}, \quad Z = \sqrt{R^2 + (\omega \cdot L)^2}; \quad \varphi = \arctan\left(\frac{\omega \cdot L}{R}\right) \in (0, \pi/2), \quad (4)$$

gde je  $Z$ -impedansa  $RL$  kola. Veličina  $X_L = \omega \cdot L$  zove se *induktivna otpornost* savršenog kalema. *Prinudni odziv, kompletan odziv* kola i napon kalema za  $t \geq 0$  dati su sledećim relacijama:

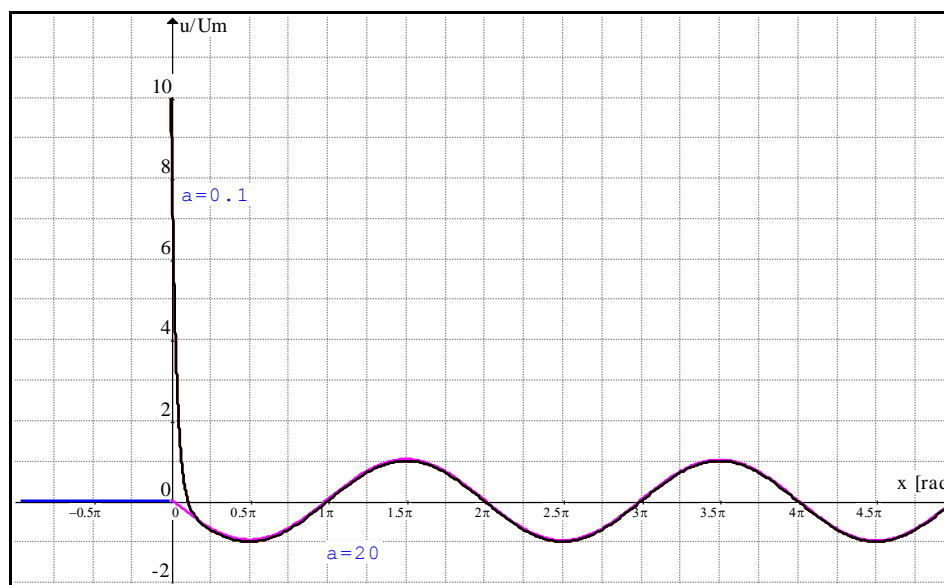
$$\begin{aligned} i_p(t) = \frac{E_m}{Z} \cdot \cos(\omega \cdot t + \theta - \varphi), \quad K = -i_p(0) = -\frac{E_m}{Z} \cdot \cos(\theta - \varphi), \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot f, \\ i(t) = -\frac{E_m}{Z} \cdot \cos(\theta - \varphi) \cdot e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E_m}{Z} \cdot \cos(\omega \cdot t + \theta - \varphi), \end{aligned} \quad (5)$$

$$u(t) = L \frac{di}{dt} = E_m \cdot \frac{R}{Z} \cdot \cos(\theta - \varphi) \cdot e^{-\frac{R}{L}t} - U_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \theta - \varphi), \quad U_m := \omega \cdot L \cdot \frac{E_m}{Z} = \omega \cdot L \cdot I_m.$$

Sopstvena komponenta odziva iščezava u prelaznom procesu koji traje do uspostavljanja stacionarnog stanja kada struja kola postaje  $I_m \cdot \cos(\omega \cdot t + \psi)$ , gde je  $\psi = \theta - \varphi$  početni fazni stav struje kola. Ugao  $\varphi = \theta - \psi$  koji predstavlja razliku početnih faza ems  $e(t)$  i struje  $i(t)$  u ustaljenom prostoperiodičnom režimu zove se fazna razlika između ems i struje. Fazna razlika  $\varphi$  zavisi samo od  $RL$  parametara kola i frekvencije  $\omega$ . Mada komponenta sopstvenog strujnog odziva asimptotski teži nuli kada  $t \rightarrow \infty$ , intenzitet struje u toku prelaznog procesa može biti skoro i dvostruko veći od amplitude prinudnog odziva, u slučaju kada je vremenska konstanta  $L/R$  velika u odnosu na  $T$ . Na sl. 2 prikazana je varijacija normalizovane struje kola  $i/I_m$ , a na sl. 3 varijacija normalizovanog napona  $u/U_m$  kalema, u intervalu  $x = \omega \cdot t \in [0, 20\pi]$  — u slučaju kada je  $\theta = \varphi$  i  $a = \omega \cdot L/R = 0.1$  i 20.



Sl. 2



Sl. 3

Na sl. 2 uočava se da prelazni proces uspostavljanja prostoperiodične struje u kolu traje mnogo kraće kada je  $a$  malo ( $a=0.1$ ), nego kada je ono veliko ( $a=20$ ). S druge strane, na sl. 3 uočava se i da je u posmatranom slučaju za malo  $a$  ( $a=0.1$ ) prelazni proces uspostavljanja prostoperiodičnog napona na kalemu praćen njegovim višestrukim premašenjem u odnosu na amplitudu  $U_m$  u ustaljenom stanju, kao i da je to premašenje sasvim neznatno u slučaju kada je  $a$  veliko ( $a=20$ ).

**Otpornik u ustaljenom prostoperiodičnom režimu:**

$$u_R = R \cdot i = R \cdot I_m \cdot \cos(\omega \cdot t + \psi) \equiv U_{Rm} \cdot \cos(\omega \cdot t + \theta_R) \Rightarrow U_{Rm} = R \cdot I_m \wedge \theta_R = \psi, \text{ tj.}$$

► U ustaljenom prostoperiodičnom režimu struja otpornika i napon na njemu uvek su u fazi (tj.  $\theta_R = \psi$ ). Efektivna vrednost (prostoperiodičnog) napona na otporniku je

$$U_R = \frac{U_{Rm}}{\sqrt{2}} = \frac{RI_m}{\sqrt{2}} = R \cdot I, \text{ gde je } I \text{ efektivna vrednost struje kola.}$$

Ako je  $j$ -imaginarna jedinica ( $j = \sqrt{-1}$ ), definišimo sa  $\underline{I} = I \cdot \exp(j \cdot \psi)$  kompleksnog predstavnika struje kola  $i = I\sqrt{2} \cdot \cos(\omega \cdot t + \psi)$ , a sa  $\underline{U}_R = U_R \cdot \exp(j \cdot \theta_R)$  kompleksnog predstavnika napona na otporniku  $R$ ,  $u_R = U_R \sqrt{2} \cdot \cos(\omega \cdot t + \theta_R)$ . U ustaljenom stanju struja kola  $i$  i napon na otporniku  $u_R$  mogu se predstaviti u svakom trenutku  $t$  u obliku:

$$i = \sqrt{2} \cdot \operatorname{Re}\{\underline{I} \cdot e^{j\omega t}\} \wedge u_R = \sqrt{2} \cdot \operatorname{Re}\{\underline{U}_R \cdot e^{j\omega t}\}, \quad (17)$$

to se odatle pri usaglašenim smerovima za napon  $u_R$  i struju  $i$  lako dobija sledeća implikacija,

$$\forall t: u_R = \sqrt{2} \cdot \operatorname{Re}\{\underline{U}_R \cdot e^{j\omega t}\} = R \cdot i = \sqrt{2} \cdot \operatorname{Re}\{R \cdot \underline{I} \cdot e^{j\omega t}\} \Rightarrow \underline{U}_R = R \cdot \underline{I} = \underline{Z}_R \cdot \underline{I}. \quad (18)$$

Relacija (18) pokazuje da se kompleksni predstavnik napona na otporniku *usaglašenog smera* sa strujom, dobija kao proizvod termogene otpornosti  $R$  (ili "kompleksne impedanse" otpornika  $\underline{Z}_R = R$ ) i kompleksnog predstavnika struje  $\underline{I}$ .

**Kalem u ustaljenom prostoperiodičnom režimu:**

$$u_L = L \cdot \frac{di}{dt} = -\omega \cdot L \cdot I_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi) = \omega \cdot L \cdot I_m \cdot \cos(\omega \cdot t + \psi + \frac{\pi}{2}) \equiv U_{Lm} \cdot \cos(\omega \cdot t + \theta_L) \Rightarrow$$

$$U_{Lm} = \omega \cdot L \cdot I_m \wedge \theta_L = \psi + \frac{\pi}{2}, \text{ tj.}$$

► U ustaljenom prostoperiodičnom režimu struja kalema fazno zaostaje za naponom na njemu za ugao  $\pi/2$  (tj.  $\theta_L - \psi = \pi/2$ ). Efektivna vrednost napona na kalemu je

$$U_L = \frac{U_{Lm}}{\sqrt{2}} = \omega \cdot L \cdot \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \omega \cdot L \cdot I = X_L \cdot I \quad (X_L = \omega \cdot L \leftarrow \text{induktivna otpornost kalema}).$$

Definišimo sa  $\underline{U}_L = U_L \cdot \exp(j \cdot \theta_L)$  kompleksnog predstavnika napona na kalemu induktivnosti  $L$ ,  $u_L = U_L \sqrt{2} \cdot \cos(\omega \cdot t + \theta_L)$ . S obzirom da se struja kola  $i$  i napon  $u_L$  mogu predstaviti u svakom trenutku u sledećem obliku:

$$i = \sqrt{2} \cdot \operatorname{Re}\{\underline{I} \cdot e^{j\omega t}\} \wedge u_L = \sqrt{2} \cdot \operatorname{Re}\{\underline{U}_L \cdot e^{j\omega t}\}, \quad (19)$$

to se odatle pri usaglašenim smerovima za napon  $u_L$  i struju  $i$  lako dobija sledeća implikacija,

$$\forall t: u_L = \sqrt{2} \cdot \operatorname{Re}\{\underline{U}_L \cdot e^{j\omega t}\} = L \cdot \frac{di}{dt} = \sqrt{2} \cdot \operatorname{Re}\{(j\omega \cdot L) \cdot \underline{I} \cdot e^{j\omega t}\} \Rightarrow \underline{U}_L = (j\omega \cdot L) \cdot \underline{I} = \underline{Z}_L \cdot \underline{I}. \quad (20)$$

Relacija (20) pokazuje da se kompleksni predstavnik napona kalema usaglašenog smera sa strujom, dobija kao proizvod kompleksne impedanse kalema  $\underline{Z}_L = j\omega \cdot L$  i kompleksnog predstavnika struje  $\underline{I}$ .

**Kondenzator u ustaljenom prostoperiodičnom režimu:**

$$i = C \cdot \frac{du_C}{dt} = C \frac{d}{dt}[U_{Cm} \cos(\omega \cdot t + \theta_C)] = -\omega \cdot C \cdot U_{Cm} \cdot \sin(\omega \cdot t + \theta_C) = \omega \cdot C \cdot U_{Cm} \cdot \cos(\omega \cdot t + \theta_C + \frac{\pi}{2}) =$$

$$= I_m \cos(\omega \cdot t + \psi) \Rightarrow I_m = \omega \cdot C \cdot U_{Cm} \wedge \psi = \theta_C + \frac{\pi}{2} \text{ ili}$$

$$U_{Cm} = \frac{1}{\omega \cdot C} \cdot I_m = X_C \cdot I_m \quad (X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} \leftarrow \text{kapacitivna otpornost kondenzatora}) \wedge \theta_C = \psi - \frac{\pi}{2}.$$

► U ustaljenom prostoperiodičnom režimu struja kondenzatora fazno prednjači naponu na njemu za ugao  $\pi/2$  (tj.  $\psi - \theta_C = \pi/2$ ). Efektivna vrednost napona na kondenzatoru je,

$$U_C = \frac{U_{Cm}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\omega \cdot C} \cdot \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\omega \cdot C} \cdot I = X_C \cdot I.$$

Definišimo sa  $\underline{U}_C = U_C \cdot \exp(j \cdot \theta_C)$  kompleksnog predstavnika napona  $u_C = U_C \sqrt{2} \cdot \cos(\omega \cdot t + \theta_C)$  na kondenzatoru kapacitivnosti  $C$ . Pošto se struja kola  $i$  i napon  $u_C$  mogu predstaviti u svakom trenutku u obliku:

$$i = \sqrt{2} \cdot \operatorname{Re}\{I \cdot e^{j\omega t}\} \quad \wedge \quad u_C = \sqrt{2} \cdot \operatorname{Re}\{\underline{U}_C \cdot e^{j\omega t}\}, \quad (21)$$

to se odatle pri usaglašenim smerovima za napon  $u_C$  i struju  $i$  lako dobija sledeća implikacija

$$\forall t: i = \sqrt{2} \cdot \operatorname{Re}\{I \cdot e^{j\omega t}\} = C \cdot \frac{du_C}{dt} = \sqrt{2} \cdot \operatorname{Re}\{(j\omega \cdot C) \cdot \underline{U}_C \cdot e^{j\omega t}\} \Rightarrow \underline{U}_C = \frac{1}{j\omega \cdot C} \cdot I = \underline{Z}_C \cdot I. \quad (22)$$

Dobijena relacija (22) pokazuje da se kompleksni predstavnik napona na kondenzatoru usaglašenog smera sa strujom, određuje kao proizvod kompleksne impedanse kondenzatora  $\underline{Z}_C = 1/(j\omega \cdot C)$  i kompleksnog predstavnika struje  $I$ .

**Svi zakoni koji važe u elektrokinetici vremenski konstantnih struja, važe i u ustaljenom prostoperiodičnom režimu, stim što se umesto trenutnih vrednosti struja i napona koriste kompleksni predstavnici struja i napona, a umesto RLC elemenata njihove impedanse.**

### ***I Kirhofov zakon u kompleksnom obliku:***

Pretpostavimo da se u bilo kojem čvoru mreže u ustaljenom prostoperiodičnom režimu stiče  $n$  grana sa strujama  $i_k = I_k \sqrt{2} \cdot \cos(\omega \cdot t + \psi_k)$  ( $k = \overline{1, n}$ ), čiji su kompleksni predstavnici respektivno  $\underline{I}_k = I_k \cdot \exp(j \cdot \psi_k)$ . Tada iz prvog Kirhofovog zakona primenjenog na taj čvor sledi:

$$\forall t: \sum_{k=1}^n \pm i_k = 0, \quad \sqrt{2} \cdot \operatorname{Re}\left[\left(\sum_{k=1}^n \pm \underline{I}_k\right) \cdot e^{j\omega t}\right] = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^n \pm \underline{I}_k = 0 \leftarrow \begin{array}{l} \text{Prvi Kirhofov zakon} \\ \text{u kompleksnom obliku} \end{array} \quad (23)$$

### ***II Kirhofov zakon u kompleksnom obliku:***

Neka bilo koju konturu mreže u ustaljenom prostoperiodičnom režimu obrazuje  $m$  grana sa naponima  $u_k = U_k \sqrt{2} \cdot \cos(\omega \cdot t + \theta_k)$  ( $k = \overline{1, m}$ ), čiji su kompleksni predstavnici respektivno  $\underline{U}_k = U_k \cdot \exp(j \cdot \theta_k)$ . Tada se iz drugog Kirhofovog zakona za tu konturu dobija

$$\forall t: \sum_{k=1}^m \pm u_k = 0, \quad \sqrt{2} \cdot \operatorname{Re}\left[\left(\sum_{k=1}^m \pm \underline{U}_k\right) \cdot e^{j\omega t}\right] = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^m \pm \underline{U}_k = 0 \leftarrow \begin{array}{l} \text{Drugi Kirhofov zakon} \\ \text{u kompleksnom obliku} \end{array} \quad (24)$$

Relacije (18), (20) i (22) koje povezuju kompleksne predstavnike napona i struje otpornika, kalema i kondenzatora predstavljaju **kompleksne oblike Omovog zakona za te linearne elemente**.

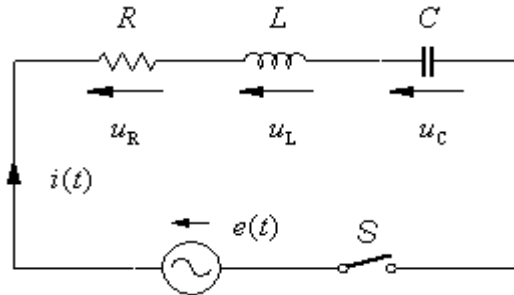
*Prema tome, u ustaljenom prostoperiodičnom režimu u RLC kolima i mrežama:*

(a) Sa kompleksnim impedansama elemenata postupa se isto kao i sa otpornicima u termogenim mrežama. Kompleksna impedansa u opštem slučaju je oblika  $\underline{Z} = R + j \cdot X = Z \cdot e^{j \cdot \varphi}$ , gde je  $R$ -rezistansa,  $X$ -reaktansa,  $Z$  je moduo, a  $\varphi$ -argument kompleksne impedanse  $\underline{Z}$ . Kod pasivnih RLC mreža uvek je  $R \geq 0$ , a  $X$  može biti  $> 0$  ("pretežno induktivna" impedansa) ili  $< 0$  ("pretežno kapacitivna" impedansa), u zavisnosti od RLC parametara i kružne frekvencije. Recipročna vrednost impedanse  $\underline{Z}$  zove se admitansa  $\underline{Y}$ :

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R + j \cdot X} = \frac{R}{R^2 + X^2} - j \cdot \frac{X}{R^2 + X^2} = G + j \cdot B, \quad G = \frac{R}{R^2 + X^2}, \quad B = -\frac{X}{R^2 + X^2}, \quad (27)$$

gde se  $G$  zove konduktansa, a  $B$  susceptansa admitanse  $\underline{Y}$ .

(b) Važe kompleksni oblici svih navednih teorema mreža i svih metoda koje se koriste za analizu tih mreža (npr., metod konturnih struja, metod potencijala čvorova itd.).



Sl. 4

Za RLC kolo na sl. 4, iz kompleksnog oblika Omovog zakona za RLC elemente i drugog Kirhofovog zakona (24), odmah se dobija sledeći **kompleksni oblik Omovog zakona za kolo**:

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{E}}{R + j \cdot \omega \cdot L + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}} = \frac{\underline{E}}{R + j \cdot \left( \omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C} \right)} = \frac{E \cdot e^{j\theta}}{Z \cdot e^{j\varphi}} = I \cdot e^{j(\theta - \varphi)} = I \cdot e^{j\psi}, \quad (28)$$

$$\underline{Z} = Z \cdot e^{j\varphi} = R + j \cdot \left( \omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C} \right), \quad Z = |\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + \left( \omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C} \right)^2}, \quad \varphi = \arctan \left( \frac{\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}}{R} \right),$$

gde je  $\underline{E}$ -kompleksni predstavnik prostoperiodične ems generatora  $e(t)$ , a  $\underline{Z}$ -kompleksna impedansa rednog RLC kola.

Ustaljen prostoperiodični režim koji vlada u RLC kolu na sl. 4 kada je frekvencija generatora  $\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  zove se **fazna rezonancija**. Tada su ems i struja kola u fazi ( $\Leftrightarrow \varphi = 0$ ), kompleksni predstavnik struje kola je  $\underline{I} = \underline{E}/R$ , a napona na kalemu i kondenzatoru  $\underline{U}_L = (j\omega_0 \cdot L/R) \cdot \underline{E} = (j\sqrt{L/C}/R) \cdot \underline{E}$  i  $\underline{U}_C = \underline{E}/(j\omega_0 \cdot C \cdot R) = (-j\sqrt{L/C}/R) \cdot \underline{E}$ , respektivno. Prema tome, efektivne vrednosti napona na kalemu i kondenzatoru kod rednog RLC kola u faznoj rezonanciji su  $U_L = U_C = (\sqrt{L/C}/R) \cdot E$  i u slučaju kada je  $\sqrt{L/C} \gg R$  one mogu višestruko da premaše efektivnu vrednost ems kola  $E$ . Usled toga u kolu tada može nastupiti proboj dielektrika u kondenzatoru, ili oštećenje izolacije žice kod kalema. Pri faznoj rezonanciji naponi  $u_L$  i  $u_C$  su u protivfazi, tj. njihove početne faze razlikuju se za  $\pi$  ( $\theta_L - \theta_C = \pi$ ).

**Zadatak 1:** U delu neke električne mreže prikazanom na sl. 5 u kojoj vlada ustaljen prostoperiodični režim, poznati su potencijali čvorova 1, 2 i 3, respektivno,  $v_1 = V\sqrt{2} \cdot \cos(\omega t)$ ,  $v_2 = 2V\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \pi/3)$  i  $v_3 = 4V\sqrt{2} \cdot \cos(\omega t + \pi/6)$ . Odrediti trenutne vrednosti potencijala nultog čvora i struja svih elemenata. Podaci:  $V = 20$  [V],  $\omega = 2 \cdot 10^3$  [rad/s],  $R = 10$  [ $\Omega$ ],  $L = 10$  [mH] i  $C = 12.5$  [ $\mu$ F].

**Rešenje:**

Kako je  $v_2 = 2V\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \pi/3) = 2V\sqrt{2} \cdot \cos(\pi/2 - \omega t - \pi/3) = 2V\sqrt{2} \cdot \cos(\omega t - \pi/6)$ , fazori potencijala čvorova su  $\underline{V}_1 = V$ ,  $\underline{V}_2 = 2Ve^{-j\pi/6}$  i  $\underline{V}_3 = 4Ve^{j\pi/6}$ , a struja elemenata  $i_1$ ,  $i_2$  i  $i_3$  redom:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{V}_1 - \underline{V}_0}{R}, \quad \underline{I}_2 = \frac{\underline{V}_2 - \underline{V}_0}{j\omega \cdot L}, \quad \underline{I}_3 = j\omega \cdot C \cdot (\underline{V}_3 - \underline{V}_0). \quad (32)$$

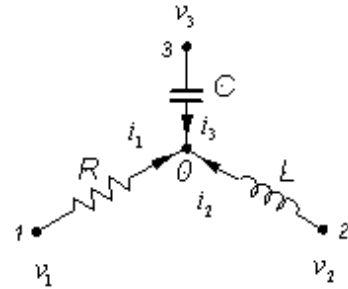
Prema IKZ je  $\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0$ , pa se posle zamene brojnih vrednosti i izračunavanja dobija:

$$\underline{V}_0 = \frac{\frac{V_1}{R} + \frac{V_2}{j\omega L} + j\omega C \cdot \underline{V}_3}{\frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C} = 0[\text{V}], \quad v_0(t) = 0[\text{V}],$$

$$\underline{I}_1 = \frac{V_1}{R} = 2 [\text{A}], \quad i_1(t) = 2\sqrt{2} \cdot \cos(\omega t) [\text{A}],$$

$$\underline{I}_2 = \frac{V_2}{j\omega L} = 2 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{3}} [\text{A}], \quad i_2(t) = 2\sqrt{2} \cdot \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) [\text{A}],$$

$$\underline{I}_3 = j\omega C \cdot \underline{V}_3 = 2 \cdot e^{j\frac{2\pi}{3}} [\text{A}], \quad i_3(t) = 2\sqrt{2} \cdot \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) [\text{A}]. \quad (33)$$

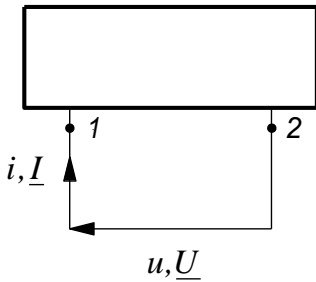


Sl. 5

## 2. Snaga u kolima i mrežama sa prostoperiodičnim strujama. Aktivna, reaktivna i prividna snaga. Faktor snage i faktor reaktivnosti prijemnika.

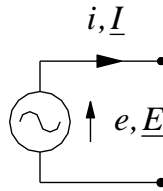
Posmatrajmo proizvoljan prijemnik kompleksne impedanse  $\underline{Z} = \underline{U}/\underline{I} = Z \cdot e^{j\varphi}$  (sl. 6a), koji može biti ili neki potrošač u pravom smislu te reči, ili *ekvivalentni deo neke električne mreže*. Kompleksna impedansa  $\underline{Z}$  zavisi od parametara prijemnika i od kružne frekvencije  $\omega = 2\pi/T$ .

Prijemnik kompleksne impedanse  $\underline{Z}$



$$\underline{Z} = Z \cdot e^{j\varphi}, \quad Z = |\underline{Z}| = \frac{|\underline{U}|}{|\underline{I}|} = \frac{U}{I}$$

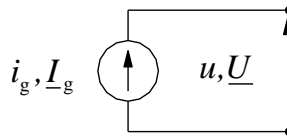
(a)



Trenutna snaga koju ovaj generator odaje je  $e i$ , a trenutna snaga koju prima je  $-e i$ .

$\cos\varphi$  - faktor snage prijemnika

$\sin\varphi$  - faktor reaktivnosti prijemnika



Trenutna snaga koju ovaj generator odaje je  $u i_g$ , a trenutna snaga koju prima je  $-u i_g$ .

(b)

Sl. 6

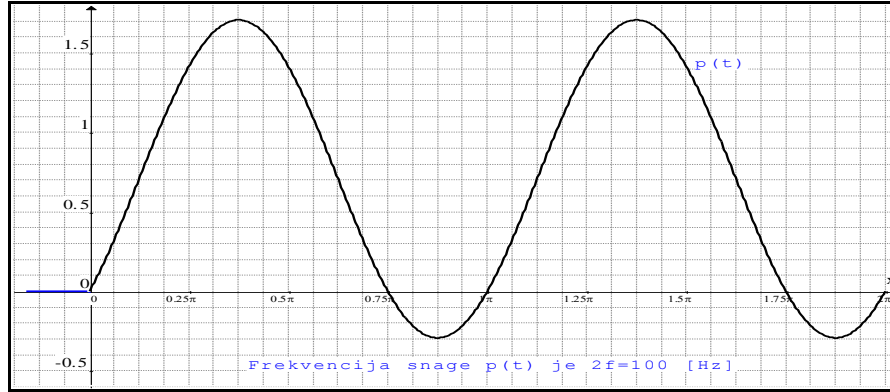
Ako je prijemnik sa sl. 6a priključen na generator napona  $u = U\sqrt{2} \cdot \cos(\omega t + \theta)$  i ako je njegova struja u ustaljenom prostoperiodičnom režimu  $i = I\sqrt{2} \cdot \cos(\omega t + \psi)$ , tada je *trenutna snaga* koju potrošač *prima* data relacijom:

$$\begin{aligned} p(t) &= u(t) \cdot i(t) = 2UI \cdot \cos(\omega t + \theta) \cdot \cos(\omega t + \psi) = UI \cdot \cos(\theta - \psi) + UI \cdot \cos(2\omega t + \theta + \psi) = \\ &= UI \cdot \cos\varphi + UI \cdot \cos(2\omega t + \theta + \psi), \quad \text{gde je } \varphi = \theta - \psi \text{ - fazna razlika između napona i struje.} \end{aligned} \quad (34)$$

Na sl. 7 prikazan je dijagram normalizovane trenutne snage prijemnika  $p(t)/(U \cdot I)$  u slučaju kada je  $\omega = 2\pi/T = 314 [\text{rad/s}]$  ( $f = 50 [\text{Hz}]$ ,  $T = 1/f = 20 [\text{ms}]$ ),  $u = U\sqrt{2} \cdot \cos(\omega t + 3\pi/4)$  i  $i = I\sqrt{2} \cdot \cos(\omega t + \pi/2)$ . Iz relacije (34) sledi da je frekvencija trenutne snage prijemnika  $2f$ . Ta snaga, u slučaju kada je  $\cos\varphi < 1$ , može biti čak i negativna u određenim vremenskim intervalima. To znači da se u tim intervalima prijemnik ponaša kao izvor i da vraća energiju izvoru napona  $u(t)$ . Na sl. 6b prikazana je usvojena konvencija o smerovima napona i struje generatora koju valja poštovati da bi se pravilno odredila snaga generatora. Iz relacije (34) lako se zaključuje da je  $p(t) \geq 0$  ( $\forall t$ ), ako i samo ako je prijemnik čisto termogenog karaktera, tj. ako je  $\varphi = 0$  ( $\Leftrightarrow$  tj. ako su napon i struja prijemnika u fazi). *Srednja ili aktivna snaga prijemnika P* definiše se preko relacije (34) na sledeći način:

$$P = \overline{p(t)} = \frac{2}{T} \cdot \int_0^{T/2} p(t) \cdot dt = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T p(t) \cdot dt = UI \cdot \cos\varphi \text{ [W]}, \quad (35)$$

i predstavlja *srednju brzinu sa kojom se električni rad generatora u prijemniku pretvara u toplotu, mehanički rad* (npr. kod motora naizmenične struje) ili u druge vidove rada ili energije i *nepovratno odlazi iz mreže*. Primetimo da je kod *idealnog kalema i kondenzatora*  $\cos\varphi=0$ , što znači da idealni reaktivni elementi ne konzumiraju aktivnu snagu. U tehničkoj praksi od interesa je poznavanje srednje, ili aktivne snage  $P$ . Usvojeno je da se  $\cos\varphi$  zove *faktor snage*, a  $\sin\varphi$  *faktor reaktivnosti prijemnika*.



Sl. 7

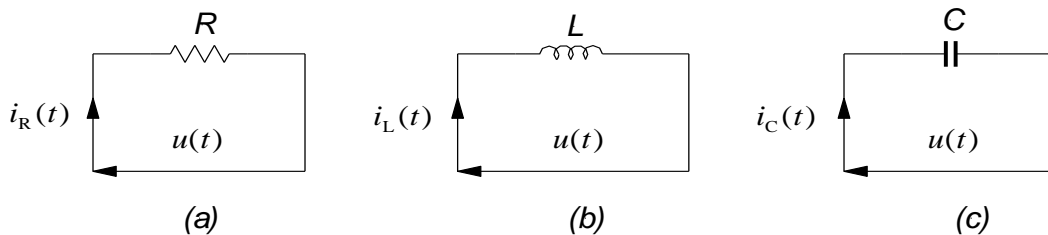
Trenutna i aktivna snaga čisto termogenog prijemnika (tj. otpornika) prikazanog na sl. 8a su:

$$p_R(t) = \frac{u^2(t)}{R} = \frac{2 \cdot U^2}{R} \cdot \cos^2(\omega \cdot t) = \frac{U^2}{R} \cdot [1 + \cos(2\omega \cdot t)] \geq 0, \quad P_R = \overline{p_R(t)} = \frac{U^2}{R}, \quad (36)$$

što znači da se električna energija u otporniku *praktično stalno* pretvara u toplotu (ali ne i obrnuto), zbog čega se za otpornik kaže da je *čisto aktivni prijemnik*.

$$u(t) = U\sqrt{2} \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$i_R(t) = \frac{U}{R} \sqrt{2} \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad i_L(t) = \frac{U}{\omega \cdot L} \sqrt{2} \cdot \cos(\omega \cdot t - \frac{\pi}{2}) \quad i_C(t) = \omega \cdot C \cdot U \sqrt{2} \cdot \cos(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2})$$



Sl. 8

Trenutna snaga *idealnog kalema* na sl. 8b je:

$$p_L(t) = u(t) \cdot i_L(t) = \frac{2 \cdot U^2}{\omega \cdot L} \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \sin(\omega \cdot t) = \frac{U^2}{\omega \cdot L} \cdot \sin(2\omega \cdot t), \quad (37)$$

što znači da se kalem naizmenično ponaša kao prijemnik i kao generator. U toku jedne poluperiode ( $=T/4$ ) snaga  $p_L(t)$  je pozitivna, pa se tada energija generatora deponuje u magnetsko polje kalema, a u toku druge poluperiode  $p_L(t)$  je negativno, pa se deponovana energija kalema u celini vraća mreži. Zato se za idealni kalem kaže da je *čisto reaktivni prijemnik*.

Trenutna snaga *idealnog kondenzatora* na sl. 8c je:

$$p_C(t) = u(t) \cdot i_C(t) = -2 \cdot \omega \cdot C \cdot U^2 \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \sin(\omega \cdot t) = -\omega \cdot C \cdot U^2 \cdot \sin(2\omega \cdot t), \quad (38)$$

što znači da se i kondenzator naizmenično ponaša kao prijemnik i generator. U toku jedne poluperiode ( $=T/4$ ) snaga  $p_C(t)$  je pozitivna, pa se tada energija generatora deponuje u "elektrostatičko" polje kondenzatora, a u toku druge poluperiode  $p_C(t)$  je negativno, pa se deponovana energija kondenzatora u celini vraća mreži. Zato se i za idealni kondenzator kaže da je *čisto reaktivni prijemnik*. Ukupna energija svih kalemova i kondenzatora u nekom električnom kolu ili mreži zove se *reaktivna energija kola ili mreže*.

Pretpostavimo sada da je prijemnik sa sl. 6a na proizvoljan način sastavljen od otpornika, kalemova i kondenzatora i da je početna faza napona  $u(t)$ ,  $\theta=0$ . Tada se prema relaciji (34) trenutna snaga koju mreža-potrošač prima može predstaviti u sledećem obliku:

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = UI \cos \varphi + UI \cos(2\omega t - \varphi) = UI \cos \varphi [1 + \cos(2\omega t)] + UI \sin \varphi \cdot \sin(2\omega t). \quad (39)$$

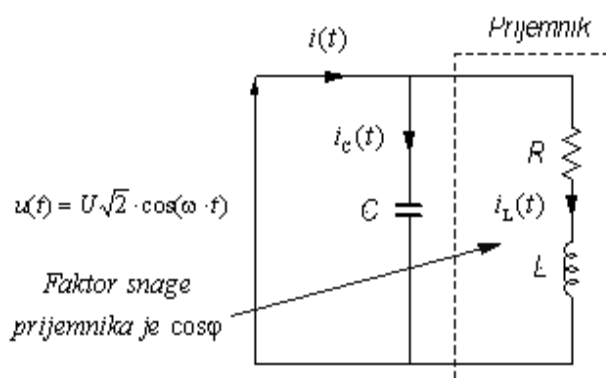
Prva od komponenti  $UI \cos \varphi [1 + \cos(2\omega t)]$  u prethodnom izrazu po znaku nikada nije negativna i odgovara brzini sa kojom se energija generatora nepovratno predaje prijemniku. Srednja vrednost te komponente u toku periode  $T$  je aktivna snaga  $P$  prijemnika. Druga komponenta  $UI \sin \varphi \cdot \sin(2\omega t)$  periodično menja i znak i vrednost sa periodom  $T/2$  i ona opisuje brzinu *razmene* energije između generatora i prijemnika. Uobičajeno je da se maksimalna brzina te razmene,  $Q = UI \sin \varphi$ , naziva *reaktivna snaga prijemnika*, a da se  $\sin \varphi$  zove *faktor reaktivnosti prijemnika*. Jedinica za reaktivnu snagu je [VAR] — "volt-amper reaktivni". Reaktivna snaga i faktor reaktivnosti otpornika su nula; reaktivna snaga kalema je  $Q_L = UI = \omega L \cdot I^2 > 0$  ( $I$  je efektivna vrednost struje kalema), a faktor reaktivnosti je  $\sin \varphi_L = 1$ ; reaktivna snaga kondenzatora je  $Q_C = -UI = -\omega C \cdot U^2 < 0$  ( $U$  je efektivna vrednost napona na kondenzatoru), a faktor reaktivnosti je  $\sin \varphi_C = -1$ .

Reaktivna snaga prijemnika je u praksi važna veličina, jer karakteriše nivo i brzinu razmene energije između generatora i prijemnika po napojnim vodovima. U prenosu energije neizbežni su gubici, a njihovu dopunsku komponentu stvara baš to bespotrebno "šetanje" energije između generatora i prijemnika. Šetanje energije je veće ukoliko je reaktivna snaga prijemnika veća. U praksi obično nastojimo da eliminišemo te neopravdane gubitke primenom postupka koji se zove "popravka" faktora snage prijemnika. Prijemnici su retko kada čisto aktivni ili čisto reaktivni. Na primer, statorski namotaji motora naizmenične struje svakako da imaju aktivnu, ali i pozitivnu reaktivnu snagu. Paralelnim priključivanjem nekog kondenzatora namotaju motora, aktivna snaga *celog sistema* svakako se neće promeniti, međutim, u slučaju kada kapacitivnost kondenzatora ima tačno određenu vrednost, reaktivnu snagu *sistema* moguće je *potpuno anulirati - kompenzovati*. Tada je, za specificiranu aktivnu snagu prijemnika neophodnu za vršenje određenog rada, struja u napojnim vodovima *minimalne efektivne vrednosti*. Primetimo da su u tom slučaju napon i struja čitavog *sistema* u fazi, što znači da je u njemu uspostavljena *fazna rezonancija* ( $\cos \varphi = 1 \Leftrightarrow \varphi = 0$ ).

**Zadatak 2:** Za induktivan prijemnik na slici (to može biti statorski namotaj nekog motora naizmenične struje), odrediti kapacitivnost kondenzatora  $C$  tako da faktor snage sistema bude jednak jedinici.

**Rešenje:**

Neka je  $\underline{U} = Ue^{j0}$  ( $\theta=0$ ) kompleksni predstavnik napona  $u(t)$ , a  $\underline{I}_C = j\omega \cdot C \cdot \underline{U}$  i  $\underline{I}_L = \underline{U} / (R + j\omega L)$  kompleksni predstavnici struja  $i_C$ ,  $i_L$ , redom. Iz I Kirhofovog zakona sledi:



$$\underline{I} = \underline{I}_C + \underline{I}_L = \left( j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L} \right) \cdot \underline{U} = \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} \cdot \underline{U} + j\omega \cdot \left[ C - \frac{L}{R^2 + (\omega L)^2} \right] \cdot \underline{U}. \quad (40)$$



Faktor snage *celog sistema* biće jednak jedinici ako je *imaginarni deo kompleksnog predstavnika struje glavne grane*  $\underline{I}$  ravan nuli. To će biti kada je  $C=L/[R^2+(\omega L)^2]$ , pa na osnovu toga dalje sledi:

$$\underline{I} = \frac{R}{R^2 + (\omega \cdot L)^2} \cdot \underline{U} = \frac{R \cdot C}{L} \cdot \underline{U}, \quad i(t) = I\sqrt{2} \cdot \cos(\omega t) = \frac{R \cdot U \sqrt{2}}{R^2 + (\omega \cdot L)^2} \cdot \cos(\omega t). \quad (41)$$

Posle popravke faktora snage, aktivna snaga mreže je nepromenjena  $P=R \cdot U^2/[R^2+(\omega L)^2]$ , ali je zato efektivna vrednost  $I$  glavne struje minimizirana na vrednost  $I=R \cdot U/[R^2+(\omega L)^2]$ . Efektivna vrednost struje *prijemnika*  $I_L=U/[R^2+(\omega L)^2]^{1/2}=[1+(\omega L/R)^2]^{1/2} \cdot I=I/\cos\varphi$  ostaje ista pre i posle popravke faktora snage.

► Aktivnu snagu  $P$  i reaktivnu  $Q$  *prijemnika* kompleksne impedanse  $\underline{Z}=Z \cdot e^{j\varphi}=Z \cdot \cos\varphi + j \cdot Z \cdot \sin\varphi=R+j \cdot X$ , moguće je predstaviti u sledećem opštem obliku:

$$P=U \cdot I \cdot \cos\varphi = Z \cdot I^2 \cdot \cos\varphi = R \cdot I^2 \geq 0 \quad [\text{W}], \quad Q=U \cdot I \cdot \sin\varphi = Z \cdot I^2 \cdot \sin\varphi = X \cdot I^2 \quad [\text{VAr}]. \quad (42)$$

Pored trenutne, aktivne i reaktivne snage u mrežama sa prostoperiodičnim strujama koriste se još i *prividna snaga*  $S$  i *kompleksna prividna snaga*  $\underline{S}$ , čija je zajednička jedinica [VA]. *Prividna snaga* *prijemnika* impedanse  $\underline{Z}$  definisana je kao:

$$S=U \cdot I = Z \cdot I^2 = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad [\text{VA}] \quad (\Rightarrow P=S \cdot \cos\varphi \wedge Q=S \cdot \sin\varphi). \quad (43)$$

Neka su  $\underline{U}=U \cdot \exp(j \cdot \theta)$  i  $\underline{I}=I \cdot \exp(j \cdot \psi)$  — kompleksni predstavnici napona  $u$  i struje  $i$  *prijemnika*.

*Kompleksna prividna snaga*  $\underline{S}$  *prijemnika* definiše se na sledeći način:

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = U \cdot e^{j\theta} \cdot (I \cdot e^{j\psi})^* = U \cdot I \cdot e^{j(\theta-\psi)} = U \cdot I \cdot e^{j\varphi} = U \cdot I \cdot \cos\varphi + j \cdot U \cdot I \cdot \sin\varphi = P + j \cdot Q,$$

$$\underline{S} = \underline{Z} \cdot \underline{I} \cdot \underline{I}^* = (R + j \cdot X) \cdot |\underline{I}|^2 = R \cdot I^2 + j \cdot X \cdot I^2 = P + j \cdot Q, \quad (44)$$

Prividna snaga mašina naizmenične struje predstavlja njihovu graničnu snagu sa kojom one mogu trajno raditi bez pregrevanja.

Kompleksna prividna snaga koju generator ulaže (videti sl. 6b) definiše se na sledeći način:

$$\underline{S}_g = \begin{Bmatrix} \underline{E} \cdot \underline{I}_g^* \\ \underline{U} \cdot \underline{I}_g^* \end{Bmatrix} = P_g + j \cdot Q_g \quad \begin{Bmatrix} P_g - \text{aktivna snaga generatora} \\ Q_g - \text{reaktivna snaga generatora} \end{Bmatrix}, \quad (45)$$

$$S_g = |\underline{S}_g| = \sqrt{P_g^2 + Q_g^2} - \text{prividna snaga generatora}.$$

**Zadatak 3:** U  $RC$  mreži na slici uspostavljen je ustaljeni prostoperiodični režim. Ako je  $R=100[\Omega]$  i  $e(t)=100\cos(400t)[\text{V}]$  odrediti:

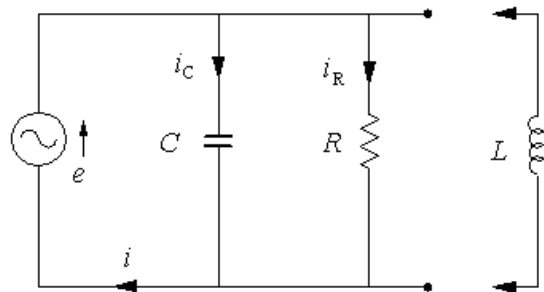
a) kapacitivnost  $C$  tako da efektivne vrednosti struja  $i_C$  i  $i_R$  budu jednake. Odrediti zatim i trenutne vrednosti struja  $i$ ,  $i_C$  i  $i_R$ . Nacrtati fazorski dijagram mreže.

b) aktivnu, reaktivnu i prividnu snagu mreže.

c) induktivnost  $L$  koju je potrebno priključiti  $RC$  mreži tako da efektivna vrednost struje  $i$  bude minimalna. Kolika je tada reaktivna snaga  $RLC$  mreže?

**Rešenje:**

a) Naponi na kondenzatoru i otporniku jednaki su elektromotornoj sili  $e(t)$ . Fazori struja  $i_C$  i  $i_R$  su



$\bar{I}_C = \bar{Y}_C \cdot \bar{E} = j\omega C \cdot \bar{E}$  i  $\bar{I}_R = \bar{Y}_R \cdot \bar{E} = \bar{E} / R$ , gde je  $\bar{E} = 100/\sqrt{2}$ [V] fazor elektromotorne sile  $e(t)$ .

Da bi efektivne vrednosti (moduli fazora) struja bile jednake potrebno je da važi  $|\bar{I}_C| = |\bar{I}_R|$ , tj.

$|j\omega C \cdot \bar{E}| = |\bar{E} / R|$ , sledi  $\omega C E = E / R$ , pa se konačno dobija  $C = \frac{1}{\omega \cdot R} = \frac{1}{400 \cdot 100} = 25[\mu\text{F}]$ .

Sada je:

$\bar{I}_C = j\omega C \cdot \bar{E} = j400 \cdot 25 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{100}{\sqrt{2}} = j \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \angle \frac{\pi}{2} [\text{A}]$ , a u vremenskom domenu

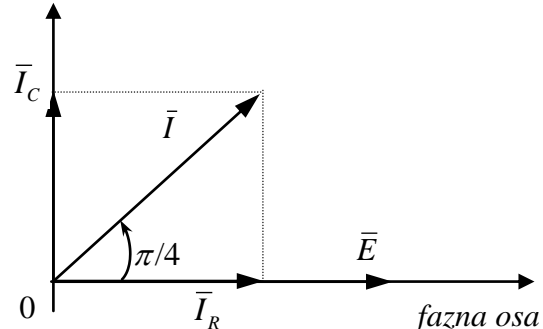
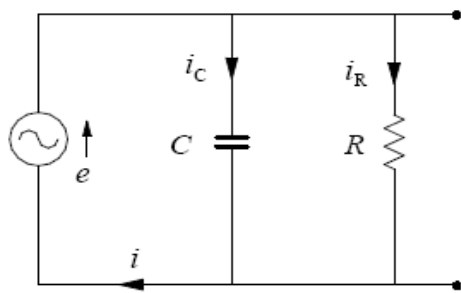
$i_C(t) = 1 \cdot \cos(400t + \frac{\pi}{2}) [\text{A}]$ .

Analogno  $\bar{I}_R = \frac{\bar{E}}{R} = \frac{1}{100} \cdot \frac{100}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} [\text{A}]$ , pa je  $i_R(t) = 1 \cdot \cos(400t) [\text{A}]$

Fazor struje izvora je na osnovu I Kirhofovog zakona:

$\bar{I} = \bar{I}_C + \bar{I}_R = j \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + j) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\sqrt{1^2 + 1^2} \cdot e^{j \arctg \frac{1}{1}}] = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} e^{j\frac{\pi}{4}} = 1 e^{j\frac{\pi}{4}} = 1 \angle \frac{\pi}{4} [\text{A}]$ ,

odnosno u vremenskom domenu  $i(t) = \sqrt{2} \cdot \cos(400t + \frac{\pi}{4}) [\text{A}]$ .



Fazorski dijagram kola sa slike

b) Kompleksna snaga izvora je

$$\bar{S} = \bar{E} \cdot \bar{I}^* = \frac{100}{\sqrt{2}} \cdot \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + j) \right]^* = \frac{100}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} (1 - j) = 50(1 - j).$$

Kako je  $\bar{S} = P + jQ$ , to je  $P = 50[\text{W}]$ ,  $Q = -50[\text{VAr}]$  i  $S = 50\sqrt{2}[\text{VA}]$ .

c) Kada priključimo kalem induktivnosti  $L$  paralelno kondenzatoru i otporniku struja izvora je:

$\bar{I} = \bar{Y} \cdot \bar{E} = \left( \frac{1}{R} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L} \right) \cdot \bar{E} = \left[ \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) \right] \cdot \bar{E}$ , a njena efektivna vrednost:

$|\bar{I}| = |\bar{E}| \cdot \left| \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) \right| = E \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}$ . Minimum izraza je za  $\omega C - \frac{1}{\omega L} = 0$ , pa je

tražena induktivnost  $L = \frac{1}{\omega^2 C} = \frac{1}{4} [\text{H}]$ . Bilans snage kola u ovom slučaju je

$$\bar{S} = \bar{E} \cdot \bar{I}^* = \bar{E} \cdot (\bar{Y} \cdot \bar{E})^* = \bar{Y}^* \cdot (\bar{E} \cdot \bar{E}^*) = \bar{Y}^* \cdot E^2 = \frac{1}{R} \cdot E^2 = \frac{1}{100} \cdot \left(\frac{100}{\sqrt{2}}\right)^2 = 50,$$

pa je  $P = 50[\text{W}]$ ,  $Q = 0[\text{VAr}]$  i  $S = 50[\text{VA}]$ .

**Zadatak 4:** U mreži na slici uspostavljen je ustaljeni prostoperiodični režim. Odrediti:

(a) trenutne vrednosti označenih struja i napona.

(b) aktivnu, reaktivnu i prividnu snagu mreže.

(c) pokazati da su u ovoj mreži ems  $e(t)$  i struja  $i(t)$  u fazi  $\forall \omega \in (0, \infty)$ .

### Rešenje:

a) Ukupna impedansa mreže sa slike je

$$\bar{Z}_U = (\bar{Z}_R + \bar{Z}_L) \parallel (\bar{Z}_R + \bar{Z}_C), \text{ gde su}$$

$$\bar{Z}_R = R = 500[\Omega],$$

$$\bar{Z}_L = j\omega L = j2 \cdot 10^4 \cdot 25 \cdot 10^{-3} = j500[\Omega] \text{ i}$$

$$\bar{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = -j \frac{1}{\omega C} = -j \frac{1}{2 \cdot 10^4 \cdot 100 \cdot 10^{-9}} = -j500[\Omega]$$

redom impedanse otpornika, kalema i kondenzatora. Zamenom se dobija:

$$\bar{Z}_U = (\bar{Z}_R + \bar{Z}_L) \parallel (\bar{Z}_R + \bar{Z}_C)$$

$$\bar{Z}_U = (500 + j500) \parallel (500 - j500)$$

$$\bar{Z}_U = \frac{500(1+j) \cdot 500(1-j)}{500(1+j) + 500(1-j)} = \frac{500^2 \cdot 2}{500 \cdot 2} = 500[\Omega]$$

Sada su struje jednake

$$\bar{I} = \frac{\bar{E}}{\bar{Z}_U} = \frac{E \cdot e^{j\theta}}{\bar{Z}_U} = \frac{10 \cdot e^{j\pi/4}}{500} = 20 \cdot e^{j\pi/4}[\text{mA}], \text{ pa je } i(t) = 20\sqrt{2} \sin(2 \cdot 10^4 t + \pi/4)[\text{mA}],$$

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{E}}{\bar{Z}_R + \bar{Z}_L} = \frac{10 \cdot e^{j\pi/4}}{500(1+j)} = \frac{10 \cdot e^{j\pi/4}}{500\sqrt{2} \cdot e^{j\pi/4}} = 10\sqrt{2}[\text{mA}], \text{ pa je } i_1(t) = 20 \sin(2 \cdot 10^4 t)[\text{mA}],$$

$$\bar{I}_2 = \frac{\bar{E}}{\bar{Z}_R + \bar{Z}_C} = \frac{10 \cdot e^{j\pi/4}}{500(1-j)} = \frac{10 \cdot e^{j\pi/4}}{500\sqrt{2} \cdot e^{-j\pi/4}} = 10\sqrt{2} \cdot e^{j\pi/2}[\text{mA}], \text{ pa je } i_2(t) = 20 \sin(2 \cdot 10^4 t + \pi/2)[\text{mA}].$$

Naponi na kalemu i kondenzatoru su:

$$\bar{U}_L = \bar{Z}_L \cdot \bar{I}_1 = j500 \cdot 10\sqrt{2} \cdot 10^{-3} = j5\sqrt{2}[\text{V}] \Rightarrow u_L(t) = 10 \sin(2 \cdot 10^4 t + \pi/2)[\text{V}],$$

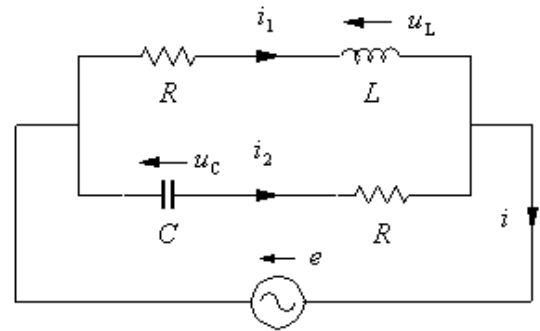
$$\bar{U}_C = \bar{Z}_C \cdot \bar{I}_2 = -j500 \cdot 10\sqrt{2} \cdot e^{j\pi/2} \cdot 10^{-3} = 5\sqrt{2}[\text{V}] \Rightarrow u_C(t) = 10 \sin(2 \cdot 10^4 t)[\text{V}].$$

b) Kako u kolu postoji samo jedan izvor to je ukupna snaga izvora jednaka ukupnoj snazi mreže. Kompleksna snaga izvora je

$$\bar{S} = \bar{E} \cdot \bar{I}^* = 10 \cdot e^{j\pi/4} \cdot (20 \cdot e^{j\pi/4} \cdot 10^{-3})^* = 10 \cdot e^{j\pi/4} \cdot (20 \cdot e^{-j\pi/4} \cdot 10^{-3}) = 0.2[\text{VA}], \text{ pa je}$$

$$P=0.2[\text{W}], Q=0[\text{VAr}] \text{ i } S=0.2[\text{VA}].$$

c) Kako je ukupna impedansa kola realna veličina,  $\bar{Z}_U = 500[\Omega]$ , koja ne zavisi od kružne učestanosti izvora  $\omega$ , to se kolo ponaša kao čisto termogeno (otporničko) pa su struja i napon izvora uvek u fazi.



$$e = \sqrt{2}E \cdot \sin(\omega t + \theta) [\text{V}], E = 10 [\text{V}], \omega = 2 \cdot 10^4 \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right], \theta = \frac{\pi}{4};$$

$$R = 500 [\Omega], L = 25 [\text{mH}], C = 100 [\text{nF}].$$

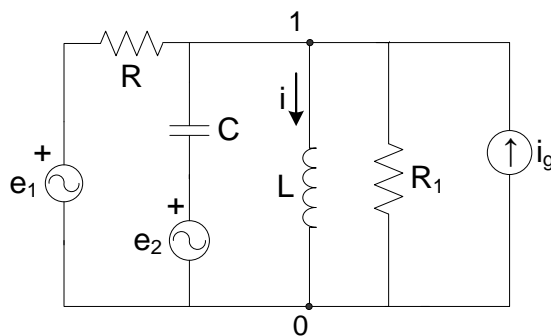
**Zadatak 5:** U mreži na slici uspostavljen je ustaljen prostoperiodični režim. Odrediti:

(a) trenutnu vrednost struje kalema  $i(t)$

(b) aktivnu snagu mreže.

$$\text{Brojni podaci: } e_1(t) = \sqrt{2}E \sin(\omega t), e_2(t) = \sqrt{2}E \cos(\omega t), i_g(t) = \sqrt{2}I_g \sin(\omega t), E = 100[\text{V}],$$

$$I_g = 0.1[\text{A}], \omega = 10^4[\text{rad/s}], R = R_1 = 1[\text{k}\Omega], L = 0.1[\text{H}], C = 0.1[\mu\text{F}].$$

**Rešenje:**

a) Odredimo najpre fazora izvora:

$$e_1(t) = \sqrt{2}E \sin(\omega t) \Rightarrow \bar{E}_1 = E = 100[\text{V}],$$

$$e_2(t) = \sqrt{2}E \cos(\omega t) = \sqrt{2}E \sin(\omega t + \pi/2) \Rightarrow \bar{E}_2 = E \cdot e^{j\pi/2} = j100[\text{V}] \text{ i}$$

$$i_g(t) = \sqrt{2}I_g \sin(\omega t) \Rightarrow \bar{I}_g = I_g = 0.1[\text{A}].$$

Zadatak ćemo rešiti metodom potencijala čvorova, usvajajući čvor 0 za referentni:

$$\left( \frac{1}{R} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L} + \frac{1}{R_1} \right) \bar{V}_1 = \frac{\bar{E}_1}{R} + j\omega C \bar{E}_2 + \bar{I}_g.$$

Nakon zamene brojnih vrednosti i izračunavanja dobijamo  $\bar{V}_1 = 50[\text{V}]$ .

Struja kalema je onda  $\bar{I} = \frac{\bar{V}_1}{j\omega L} = \frac{50}{j \cdot 10^4 \cdot 0.1} = -j50[\text{mA}] = 50 \cdot e^{-j\pi/2}[\text{mA}]$ , odnosno u vremenskom

domenu  $i(t) = 50\sqrt{2} \sin(10^4 t - \pi/2)[\text{mA}]$ .

b) Kako se aktivna snaga razvija samo na termogenim otpornicima, ukupna aktivna snaga mreže jednaka je snazi termičke disipacije na otpornicima  $R$  i  $R_1$ :

$P = R \cdot I_R^2 + R_1 \cdot I_{R1}^2$ , gde su  $I_R$  i  $I_{R1}$  efektivne jačine struja kroz otpornike  $R$  i  $R_1$ , respektivno:

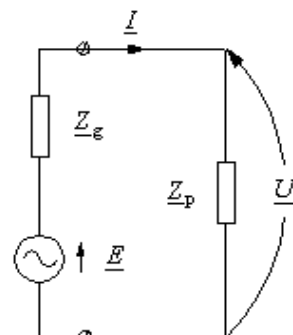
$$\bar{I}_R = \frac{\bar{E}_1 - \bar{V}_1}{R} = \frac{100 - 50}{1000} = 50[\text{mA}] \text{ i } \bar{I}_{R1} = \frac{\bar{V}_1}{R_1} = \frac{50}{1000} = 50[\text{mA}].$$

Aktivna snaga mreže je  $P = R \cdot I_R^2 + R_1 \cdot I_{R1}^2 = 1000 \cdot (50 \cdot 10^{-3})^2 + 1000 \cdot (50 \cdot 10^{-3})^2 = 5[\text{W}]$ .

**3. Prilagođenje po snazi**

U praksi često postoji potreba da se impedansa prijemnika odabere tako da njegova aktivna snaga bude maksimalna. Za prijemnik se tada kaže da je (optimalno) prilagođen po snazi generatoru tj. da je ostvaren uslov maksimalnog prenosa (aktivne) snage. Sa sličnim problemom već smo se sreli u elektrokinetici vremenski konstantnih struja kada smo pokazali da se prilagođenje po snazi može ostvariti ako i samo ako je otpornost prijemnika jednaka unutrašnjoj otpornosti generatora.

Međutim, u kolima prostoperiodične struje prijemnik u opštem slučaju karakteriše kompleksna impedansa  $\underline{Z}_p$ , a generator kompleksna unutrašnja impedansa  $\underline{Z}_g$ . Realan naponski generator ( $\underline{E}$ ,  $\underline{Z}_g$ ) "kompleksne ems"  $\underline{E}$  prikazan na slici 9 može biti, takođe i ekvivalentan Tevenenov generator koji predstavlja neku složenu električnu mrežu između neke njene dve tačke, ili dva čvora označena sa "o". Naravno, "kompleksne ems, struje i naponi" nemaju nikakavog fizičkog smisla, već isključivo predstavljaju *kompleksne predstavnike* odgovarajućih prostoperiodičnih *fizičkih veličina*. Imajući to u vidu, mi govorimo o "kompleksnoj ems", umesto o kompleksnom

**SI. 9**

predstavniku ems, ili o "kompleksnoj struji", umesto o kompleksnom predstavniku struje, ili o "kompleksnom naponu".

Ako su u kolu prikazanom na sl. 9 kompleksna impedansa generatora  $\underline{Z}_g = R_g + j \cdot X_g$ , a prijemnika  $\underline{Z}_p = R_p + j \cdot X_p$ , tada su kompleksna struja  $\underline{I}$ , napon  $\underline{U}$  i prividna snaga  $\underline{S}_p$  prijemnika:

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_g + \underline{Z}_p} = \frac{\underline{E}}{(R_g + j \cdot X_g) + (R_p + j \cdot X_p)} = \frac{\underline{E}}{(R_g + R_p) + j \cdot (X_g + X_p)},$$

$$I = |\underline{I}| = \frac{E}{\sqrt{(R_g + R_p)^2 + (X_g + X_p)^2}}, \quad E = |\underline{E}|,$$

$$\underline{U} = \underline{Z}_p \cdot \underline{I} = \frac{(R_p + j \cdot X_p) \cdot \underline{E}}{(R_g + R_p) + j \cdot (X_g + X_p)}, \quad \underline{S}_p = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = \underline{Z}_p \cdot \underline{I}^2 = \frac{(R_p + j \cdot X_p) \cdot E^2}{(R_g + R_p)^2 + (X_g + X_p)^2} =$$

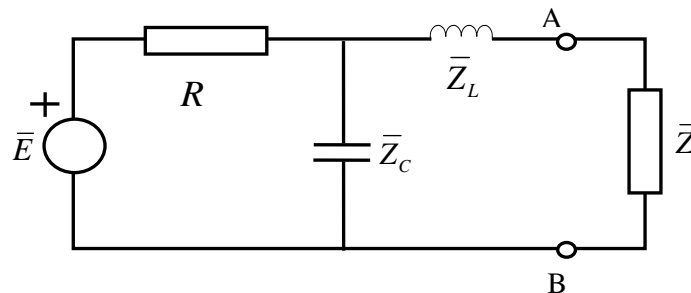
$$= P_p + j \cdot Q_p \Rightarrow P_p = \frac{R_p \cdot E^2}{(R_g + R_p)^2 + (X_g + X_p)^2} \wedge Q_p = \frac{X_p \cdot E^2}{(R_g + R_p)^2 + (X_g + X_p)^2}.$$

Aktivna snaga  $P_p$  prijemnika maksimalna je ako je istovremeno  $X_p = -X_g$  i  $R_p = R_g$ .

► Prijemnik kompleksne impedanse  $Z_p$  optimalno je prilagođen naponskom generatoru kompleksne impedanse  $Z_g$  ako je  $Z_p = Z_g^*$ , tj. ako je  $R_p = R_g$  i  $X_p = -X_g$ . Aktivna snaga prijemnika tada je maksimalna i jednaka  $E^2/(4R_g)$ . Uslov  $Z_p = Z_g^*$  zove se uslov prilagođenja po snazi

Ako je prijemnik prilagođen po snazi generatoru, tada je aktivna snaga koju generator ulaže  $P_g = E^2/(2R_g)$ , dok je reaktivna snaga  $Q_g = 0$  [VAR]. S obzirom da je aktivna snaga prijemnika tada  $P_p = E^2/(4R_g)$ , zaključujemo da se tačno jedna polovina uložene aktivne snage potroši na zagrevanje generatora usled Džulovog efekta. Kod generatora male snage (u elektronskim i telekomunikacionim kolima i mrežama) prilagođenje po snazi ima određeni smisao, dok kod prijemnika velike snage (to su prijemnici električne energije iz gradske mreže) takvo prilagođenje nema nikakav smisao, pošto ono izaziva veliko i bespotrebno zagrevanje i generatora i mreže.

**Zadatak 6:** U kolu prikazanom na slici odrediti kompleksnu impedansu opterećenja  $\bar{Z}$  tako da se na njemu razvije maksimalna aktivna snaga. Za tako određeno  $\bar{Z}$  izračunati maksimalnu aktivnu snagu. Brojni podaci:  $\bar{E} = 10 \angle 0^\circ$  [V],  $R = 4$  [ $\Omega$ ],  $\bar{Z}_C = -j3$  [ $\Omega$ ],  $\bar{Z}_L = j1$  [ $\Omega$ ].



**Rešenje:**

U odnosu na impedansu  $\bar{Z}$ , deo kola levo od tačaka A i B, može se predstaviti ekvivalentnim Tevenenovim generatorom. Elektromotorna sila Tevenenovog generatora je:

$$\bar{E}_T = \frac{\bar{Z}_C}{R + \bar{Z}_C} \bar{E} = \frac{-j3}{4 - j3} 10 \angle 0^\circ = 6 \angle -53,13^\circ \text{ [V]},$$

a ekvivalentna impedansa:

$$\bar{Z}_T = \bar{Z}_L + (R \parallel \bar{Z}_C) = \bar{Z}_L + \frac{R \bar{Z}_C}{R + \bar{Z}_C} = j1 + \frac{4(-j3)}{4 - j3} = (1,44 - j0,92) [\Omega] = R_T + jX_T.$$

Ako se nepoznata impedansa  $\bar{Z}$  prikaže kao:

$$\bar{Z} = R + jX,$$

onda je aktivna snaga koja se na njoj razvija:

$$P = R \cdot I^2,$$

gde je  $I$  efektivna vrednost struje:

$$\bar{I} = \frac{\bar{E}_T}{\bar{Z}_T + \bar{Z}} = \frac{\bar{E}_T}{(R_T + jX_T) + (R + jX)}.$$

Izraz za aktivnu snagu postaje:

$$P = R \frac{|\bar{E}_T|^2}{(R_T + R)^2 + (X_T + X)^2} = R \frac{E_T^2}{(R_T + R)^2 + (X_T + X)^2}.$$

Ovaj izraz ima maksimalnu vrednost kada je  $X_T = -X$  i  $R_T = R$ , odnosno  $\bar{Z} = \bar{Z}_T^*$ , dakle

$$\bar{Z} = (1,44 + j0,92)[\Omega].$$

Kompleksna snaga potrošača je onda:

$$\bar{I} = \frac{\bar{E}_T}{\bar{Z} + \bar{Z}_T} = \frac{\bar{E}_T}{\bar{Z} + \bar{Z}^*} = \frac{\bar{E}_T}{2\operatorname{Re}[\bar{Z}]} = \frac{\bar{E}_T}{2R},$$

$$\bar{S} = \bar{U}_{AB} \cdot \bar{I}^* = \bar{Z} \cdot \bar{I} \cdot \bar{I}^* = \bar{Z} \cdot I^2 = (R + jX)I^2 = R \cdot I^2 + jX \cdot I^2 = P + jQ,$$

a maksimalna aktivna snaga potrošača:

$$P_{\max} = R \cdot I^2 = R \left( \frac{E_T}{2R} \right)^2 = \frac{E_T^2}{4R} = \frac{E_T^2}{4R_T} = 6,25[\text{W}]$$

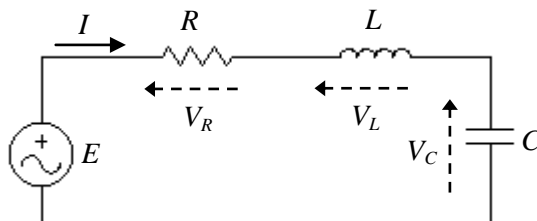
**Zadatak 7:** Za kolo na slici poznato je  $\bar{E} = 10[\text{V}]$ ,  $R = 400[\Omega]$ ,  $L = 10[\text{mH}]$ ,  $C = 10[\text{nF}]$ .

- Odrediti učestanost  $\omega_0$  pri kojoj u kolu nastaje fazna rezonancija.
- Za  $\omega_1 = \omega_0/2$ ,  $\omega_2 = \omega_0$  i  $\omega_3 = 2\omega_0$  odrediti fazore napona na otporniku, kalemu i kondenzatoru, kao i fazor struje u kolu.

**Rešenje:**

- Impedansa kola sa slike je

$$\bar{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + jX.$$



U slučaju kada je  $X=0$ , kolo se ponaša kao čisto rezistivno (otporničko) i struja  $I$  je u fazi sa ems  $E$ . Kaže se da je tada u kolu nastupila fazna rezonancija između napona i struje.

Rezonantna učestanost  $\omega_0$  određuje se iz uslova da je  $X=0$ , odnosno

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} \quad \text{ili} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{10 \cdot 10^{-2} \cdot 10 \cdot 10^{-9}}} = 1 \cdot 10^5 \left[ \frac{\text{rad}}{\text{sec}} \right]$$

b)

$\omega_1 = \omega_0 / 2 = 10^5 / 2$	$\omega_2 = \omega_0 = 10^5$	$\omega_2 = 2\omega_0 = 2 \cdot 10^5$
$\bar{I} = 6.44 \angle 75,07^\circ [\text{mA}]$	$\bar{I} = 25 \angle 0^\circ [\text{mA}]$	$\bar{I} = 6.44 \angle -75,07^\circ [\text{mA}]$
$\bar{V}_R = 2.58 \angle 75,07^\circ [\text{V}]$	$\bar{V}_R = 10 \angle 0^\circ [\text{V}]$	$\bar{V}_R = 2.58 \angle -75,07^\circ [\text{V}]$
$\bar{V}_L = 3.22 \angle 165,07^\circ [\text{V}]$	$\bar{V}_L = 25 \angle 90^\circ [\text{V}]$	$\bar{V}_L = 12.88 \angle 14,93^\circ [\text{V}]$
$\bar{V}_C = 12.88 \angle -14,93^\circ [\text{V}]$	$\bar{V}_C = 25 \angle -90^\circ [\text{V}]$	$\bar{V}_C = 3.22 \angle -165,07^\circ [\text{V}]$

#### 4. Rekapitulacija

- Ako u kolu deluje prostoperiodični (naponski ili strujni) izvor kružne učestanosti  $\omega$ , tada su u ustaljenom stanju, svi naponi i sve struje u tom kolu takođe prostoperiodični sa istom kružnom učestanošću  $\omega$ . Rešavanje kola sa naizmeničnim strujama u vremenskom domenu je isuviše matematički intenzivno, pa se zbog toga primenjuje fazorski račun.

- Fazori

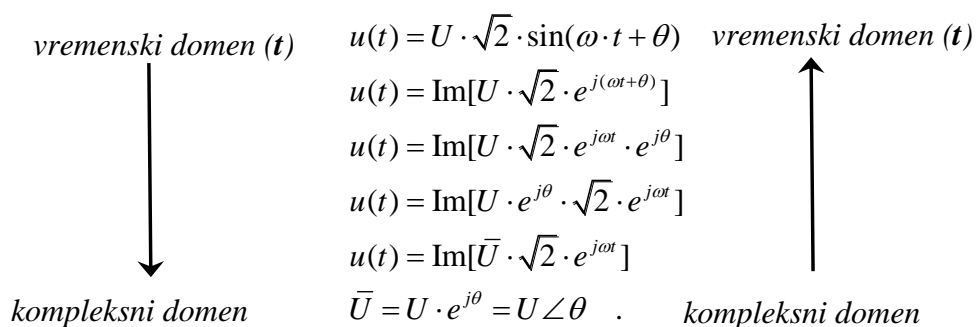
Neka je prostoperiodični napon  $u(t) = U_m \sin(\omega \cdot t + \theta) = U \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega \cdot t + \theta)$ , gde je

$U$  — efektivna vrednost napona,  $U_m$  — amplituda napona

$(\omega t + \theta)$  — trenutna faza napona,  $\theta$  — početna faza napona,

$f$  — učestanost napona  $f = 1/T$ ,  $T$  — period napona,

$\omega$  — kružna učestanost,  $\omega = 2\pi f = 2\pi / T$ .



Kompleksna veličina  $\bar{U} = U \cdot e^{j\theta} = U \angle \theta$  naziva se fazor napona  $u(t)$ .

- Snaga u ustaljenom prostoperiodičnom režimu

Kompleksna snaga  $\bar{S} = \bar{U} \cdot \bar{I}^* = P + jQ$ , gde su

$P$  — aktivna (korisna, srednja) snaga [W]

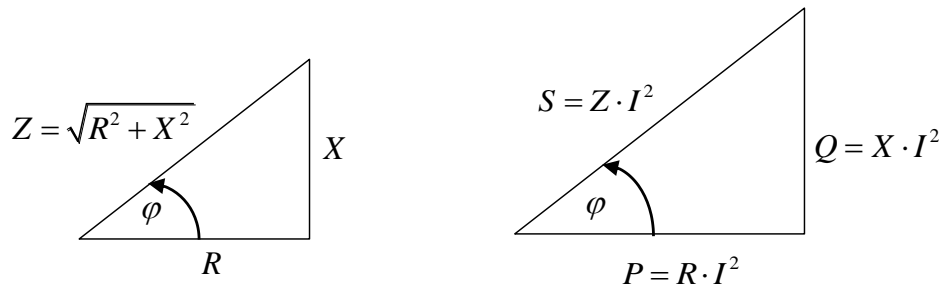
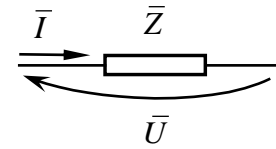
$Q$  — reaktivna snaga [VAr]

$S$  — prividna snaga [VA].

- Trougao impedanse i trougao snage

$$\bar{Z} = R + jX, \quad \bar{Z} = R + jX = \sqrt{R^2 + X^2} \cdot e^{j \arctg \frac{X}{R}} = Ze^{j\varphi}$$

$$\bar{S} = \bar{U} \cdot \bar{I}^* = \bar{Z} \cdot \bar{I} \cdot \bar{I}^* = \bar{Z} \cdot I^2 = (R + jX) \cdot I^2 = R \cdot I^2 + jX \cdot I^2 = P + jQ$$



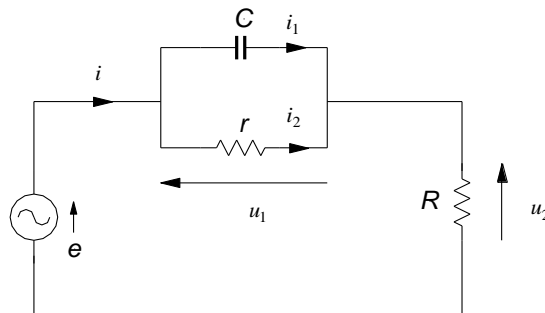
Faktor snage  $\cos \varphi = \frac{P}{S}$ , gde je  $\varphi = \arctg \frac{X}{R}$  argument impedanse i istovremeno fazni stav između napona i struje na impedansi.

### Zadaci za samostalan rad:

**Zadatak 8:** U mreži na slici u kojoj deluje generator ems  $e$  uspostavljen je ustaljen prostoperiodični režim. Poznate su efektivne vrednosti  $U_1$  i  $U_2$  napona  $u_1$  i  $u_2$ , respektivno. Odrediti:

- (a) kapacitivnost  $C$  i otpornost  $r$ .  
 (b) aktivnu, reaktivnu i prividnu snagu mreže.

**Podaci:**  $e = 90\sqrt{2} \cdot \sin(10^3 \cdot t)$  [V],  $U_1 = 50$  [V],  $U_2 = 60$  [V] i  $R = 60$  [ $\Omega$ ].



### Rešenje:

(a)  $\bar{I} = \bar{U}_2 / R \Rightarrow |\bar{I}| = |\bar{U}_2| / R \Rightarrow I = U_2 / R = 1$  [A] je efektivna vrednost struje  $I$ .

$$\text{Iz } \bar{Z}_{r,C} = \bar{U}_1 / \bar{I} = r \parallel (1 / j\omega C) = \frac{r / j\omega C}{r + 1 / j\omega C} = \frac{r}{1 + j\omega r C} \text{ sledi}$$

$$|\bar{Z}_{r,C}| = \left| \frac{r}{1 + j\omega r C} \right| = \frac{r}{\sqrt{1 + (\omega r C)^2}} = \frac{|\bar{U}_1|}{|\bar{I}|} = \frac{U_1}{I} = 50 [\Omega]. (*)$$

$$\text{Iz } \bar{Z}_U = \bar{Z}_{r,C} + R = \frac{r}{1 + j\omega r C} + R = \frac{r + R(1 + j\omega r C)}{1 + j\omega r C} = \frac{\bar{E}}{\bar{I}} \text{ sledi}$$

$$|\bar{Z}_U| = \frac{|r + R + jR\omega r C|}{|1 + j\omega r C|} = \frac{\sqrt{(r + R)^2 + (R\omega r C)^2}}{\sqrt{1 + (\omega r C)^2}} = \frac{|\bar{E}|}{|\bar{I}|} = \frac{E}{I} = 90 [\Omega]. (**)$$



Rešavanjem sistema (\*) i (\*\*), uz poznato  $R=60[\Omega]$  i  $\omega=10^3[\text{Hz}]$ , dobijamo  $r=150[\Omega]$  i  $C=18.86[\mu\text{F}]$ .

(b)

$$\bar{Z}_U = \bar{Z}_{r,c} + R = \frac{r + R + jR\omega rC}{1 + j\omega rC} = \frac{\sqrt{(r+R)^2 + (R\omega rC)^2} \cdot e^{j\arctg \frac{R\omega rC}{r+R}}}{\sqrt{1 + (\omega rC)^2} \cdot e^{j\arctg \omega rC}} = Z_U e^{j(\arctg \frac{R\omega rC}{r+R} - \arctg \omega rC)} = 90e^{j31.58^\circ} [\Omega]$$

$$\bar{I} = \frac{\bar{E}}{\bar{Z}_U} = \frac{90}{90e^{j31.58^\circ}} = 1 \cdot e^{-j31.58^\circ} = 1 \angle -31.58^\circ [\text{A}],$$

$$\bar{S} = \bar{E} \cdot \bar{I}^* = 90 \cdot 1 \cdot e^{j31.58^\circ} = 90 \cdot [\cos(31.58^\circ) + j \sin(31.58^\circ)] = (76.67 + j47.13) [\text{VA}]$$

$$P=76.67[\text{W}], Q=47.13[\text{VAr}], S=90[\text{VA}].$$

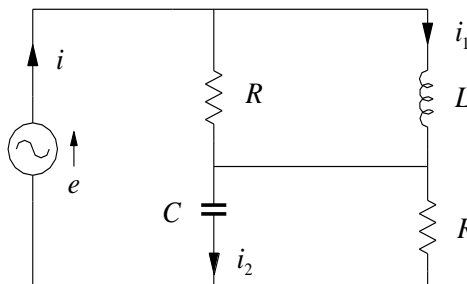
**Napomena:** Zadatak se može rešiti i „geometrijski“ na osnovu prepostavljenog izgleda fazorskog dijagrama kola. Konstruisati trougao na osnovu relacije  $\bar{E} = \bar{U}_1 + \bar{U}_2$  i činjenice da je kolo pretežno kapacitivno, pa fazori struje  $\bar{I}$  i napona  $\bar{U}_2$  prednjače ems generatora  $\bar{E}$ .

**Zadatak 9:** U mreži prikazanoj na slici vlada ustaljen prostoperiodični režim. Odrediti:

(a) trenutne vrednosti struja  $i$ ,  $i_1$  i  $i_2$ .

(b) aktivnu, reaktivnu i prividnu snagu mreže.

**Podaci:**  $e=100\sqrt{2} \cdot \sin(10^4 \cdot t)$  [V],  $R=100$  [ $\Omega$ ],  $L=10$  [mH] i  $C=1$  [ $\mu\text{F}$ ].



**Rešenje:**

(a)

$$\bar{I} = \bar{E} / (\bar{Z}_L \parallel \bar{Z}_R + \bar{Z}_C \parallel \bar{Z}_R) = \bar{E} / [j\omega L \parallel R + (1/j\omega C) \parallel R] = \bar{E} / [j\omega LR / (R + j\omega L) + R / (1 + j\omega RC)],$$

$$\bar{I} = 100 / [(50 + j50) + (50 - j50)] = 1 \Rightarrow i(t) = 1 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(10^4 t) [\text{A}],$$

$$\bar{I}_1 = \bar{I} \cdot R / (R + j\omega L) = (\sqrt{2} / 2) \cdot e^{-j\pi/4} \Rightarrow i_1(t) = 1 \cdot \sin(10^4 t - \pi/4) [\text{A}],$$

$$\bar{I}_2 = \bar{I} \cdot R / (R + 1/j\omega C) = (\sqrt{2} / 2) \cdot e^{j\pi/4} \Rightarrow i_2(t) = 1 \cdot \sin(10^4 t + \pi/4) [\text{A}]$$

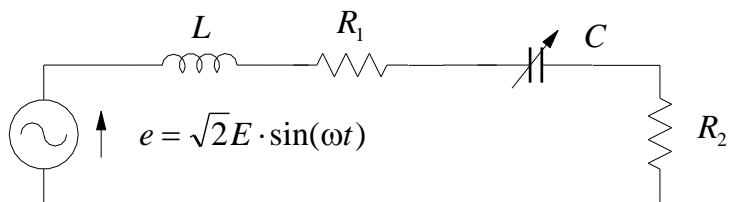
$$(b) \bar{S} = \bar{E} \cdot \bar{I}^* = 100 [\text{VA}] \Rightarrow P=100 [\text{W}], Q=0 [\text{VAr}], S=100 [\text{VA}].$$

**Zadatak 10:** U mreži na slici uspostavljen je ustaljen prostoperiodični režim. Odrediti:

(a) kapacitivnost  $C$  i otpornost  $R_2$  tako da snaga ovog otpornika bude maksimalna i izračunati je.

(b) trenutne vrednosti struje kola i napona reaktivnih elemenata ako je uslov iz tačke (a) ispunjen. Nacrtati i fazorski dijagram ovog kola.

**Podaci:**  $E=100$  [V],  $\omega=10^3$  [rad/s],  $R_1=5$  [k $\Omega$ ], i  $L=40$  [mH].



**Rešenje:**

(a)  $R_2 = R_1 = 5 [\text{K}\Omega]$ ,  $C = 1/(L \cdot \omega^2) = 25 [\mu\text{F}]$ ,  $P_{R_2 \text{ max}} = (E/2)^2 / R_2 = 0.5 [\text{W}]$ .

(b)  $\bar{Z}_u = R_1 + R_2 = 2R_1 = 10 [\text{K}\Omega]$ ,  $\bar{I} = \bar{E} / \bar{Z}_u = 100 / 10 [\text{K}\Omega] = 10 [\text{mA}]$ ,  $i(t) = 10\sqrt{2} \sin(1000t) [\text{mA}]$ ,

$\bar{U}_L = j\omega L \cdot \bar{I} = \omega L \bar{I} \cdot e^{j\pi/2} = \omega L I e^{j\pi/2} = 0.4 \angle (\pi/2) [\text{V}]$ ,  $u_L(t) = 0.4\sqrt{2} \sin(1000t + \pi/2) [\text{V}]$ ,

$\bar{U}_C = \frac{1}{j\omega C} \cdot \bar{I} = \frac{I}{\omega C} \cdot e^{-j\pi/2} = 0.4 \angle (-\pi/2) [\text{V}]$ ,  $u_C(t) = 0.4\sqrt{2} \sin(1000t - \pi/2) [\text{V}]$ .